

Chapitre 17

La fonction inverse

Objectifs :

- Découvrir la fonction inverse et ses premières propriétés.
- Découvrir les fonctions homographiques et les problèmes s'y ramenant.

1. Etude de la fonction inverse

a) **Définition** : la fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. A tout nombre réel x non nul, on associe l'inverse de x .

b) **Variations** : Pour déterminer les variations de la fonction inverse, on étudie sur deux intervalles distincts :

- sur $]0 ; +\infty[$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que $a < b$:

On obtient alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; la fonction inverse ne

conserve pas l'ordre des nombres sur $]0 ; +\infty[$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

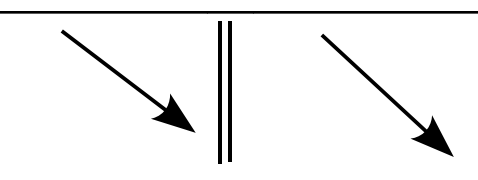
- sur $] -\infty ; 0[$: on considère a et b tels que $a < b$:

On obtient alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; la fonction inverse ne conserve pas l'ordre des

nombres sur $] -\infty ; 0[$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$.

c) **Tableau de variations** :

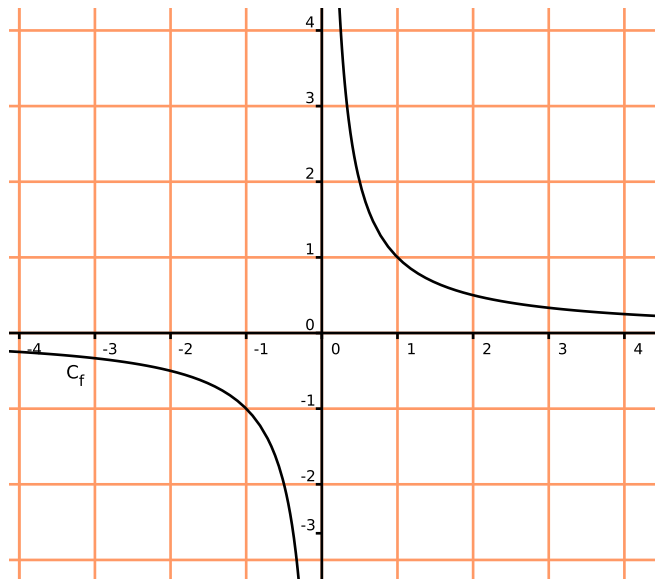
x	$-\infty$	0	$+\infty$
sens de f			



d) **Représentation graphique** :

La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.

L'origine du repère, le point O est un centre de symétrie de la courbe.



2. Comparaison de nombres et inéquations :

a) **Propriété** :

- Les inverses de deux nombres positifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.
- Les inverses de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

b) **Résolution d'inéquations** : Il s'agit de résoudre des inéquations de la forme $\frac{1}{x} < a$ (ou $\frac{1}{x} > a$, $\frac{1}{x} \leq a$, $\frac{1}{x} \geq a$) où a est un réel donné.

Exemple : résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \leq 4$ d'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est

résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq 2$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est : $S =$

c) **Encadrement de nombres** : on cherche à encadrer une expression de x faisant intervenir des inverses à l'aide d'un encadrement de x .

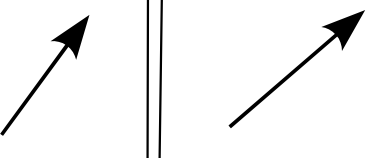
Exemples : 1) Soit $3 < x < 4$; trouver un encadrement de $\frac{2}{x} - 1$:

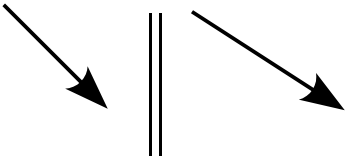
2) Encadrer $2 - \frac{5}{x}$ sachant que $-3 \leq x \leq -2$:

2. Les fonctions homographiques

a) **Définition** : les fonctions homographiques sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des nombres réels avec c non nul et $ad - bc$ non nul.

Le tableau de variations d'une fonction homographique :

Si $ad - bc > 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
sens de f			

Si $ad - bc < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
sens de f			

b) **Représentation graphique** :

La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.

Le centre de symétrie de l'hyperbole a pour coordonnées $(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c})$.

● Exercices conseillés :

- Ex 9 à 11 page 108 - comparer et encadrer des inverses.
- Ex 15 page 109 - résoudre graphiquement des inéquations.
- Ex 105 page 121 - reconnaître des courbes.
- Ex 18 page 110 - résoudre algébriquement des équations